رایج شدن یک فرهنگ اثبات در هندسه مدرسه‌ای:

تکامل اثبات دوستونی در اوایل قرن بیستم*

(بخش نخست)

پاتریسیو جی. هربست**
ترجمه: حسین غفاری
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

همراه با اصلاحات دهۀ ۱۸۹۰، و در زمانی‌که هندسه به‌عنوان جایی برای دانش‌آموزان جهت یادگیری «هنر اثبات کردن»، در نظر گرفته شد؛ در آمریکا انتظار از دانش‌آموزانِ دبیرستانی برای اثبات حکم‌های هندسی، تبدیل به یک هنجار شد. در واکنش به مطالبۀ اصلاحات، در حرفۀ معلمی فرهنگی شکل گرفت که طی آن از دانش‌آموزان خواسته می‌شد که «اثبات» تولید کنند و آن را در « قالب دوستونی[1]» به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلیل درستی هر گزاره بنویسند. من در اینجا یک گزارش تاریخی را با شروع از زمانی که هندسه به‌عنوان یک موضوع درسی مطرح شد تا وقتی که اثبات به مرکز و محور درس هندسه تبدیل شد، عرضه خواهم کرد و شرح خواهم داد که چگونه «اثبات کردن» به‌عنوان تکلیفی برای دانش‌آموزان تحول و تکامل یافت. همچنین از دلایل و توجیهات تاریخی استفاده خواهم کرد تا توضیح دهم که چگونه قالب اثبات دوستونی این امر را امکان‌پذیر ساخت که معلمان بتوانند ادعا کنند اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دهند و در عین حال دانش‌آموزان بتوانند نشان دهند فعالیت‌های آن‌ها شامل اثبات کردن می‌شود و بالاخره شرح خواهم داد چگونه این موضوع، به پایداری درس هندسه کمک کرد. من آشکار خواهم ساخت که ماهیت هندسۀ مدرسه‌ای، تحت تأثیر اصرار بر یاددهی اثبات، به چه چیزی تبدیل شد. این کار را با نشان دادن این موضوع انجام می‌دهم که دانش‌آموزان در ازای کاهش میزان مشارکتشان در توسعۀ ایده‌های جدید، می‌توانند اثبات را در حد باور عمومی از آن، یاد بگیرند. بین اصلاحات قدیمی و اصلاحات جدید که بر استدلال و اثبات تأکید می‌کند، ارتباط برقرار خواهم ساخت. با استفاده از مشاهدات تاریخی، پیشنهاد خواهم کرد که همزمان با اینکه به‌دنبال ایجاد جایگاهی برای اثبات در ریاضی مدرسه‌ای امروزی هستیم، باید نسبت به جداسازی امر «اثبات» از امر «دانستن»، بدگمان باشیم.

کلیدواژه‌ها: اثبات، هندسه، هندسه مدرسه‌ای

مقدمه

اثبات در آموزش ریاضی مدرسه‌ای آمریکا

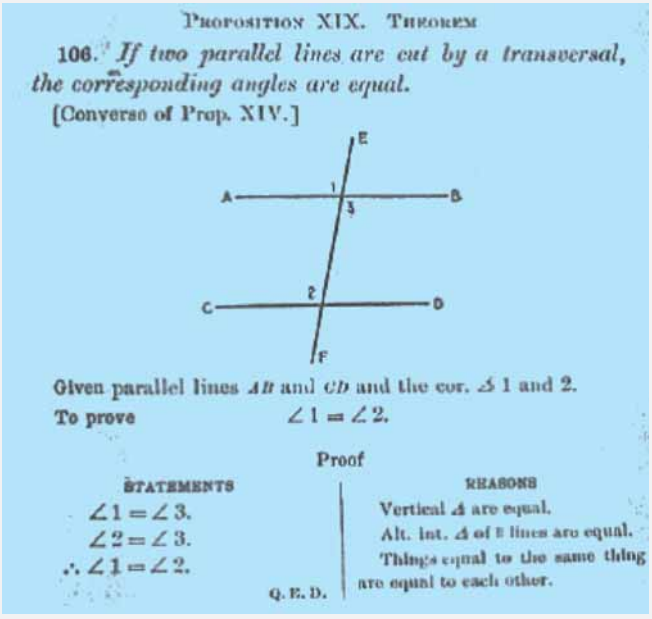
در توصیه‌های رایج برای آموزش ریاضی، همان‌طور که در اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای (شورای معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) آمده است، این انتظار وجود دارد که دانش‌آموزان در هر پایۀ تحصیلی درگیر اثبات و استدلال باشند. «بخشی از زیبایی ریاضی این است که وقتی اتفاق جالبی در آن می‌افتد، معمولاً دلیل خوبی برای آن وجود دارد، و دانش‌آموزان باید این موضوع را درک کنند». دقیق‌تر اینکه، «در پایان دورۀ دبیرستان، دانش‌آموزان باید قابلیت درک و تولید اثبات‌های ریاضی را داشته باشند» (شورای معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰، ص ۵۶). دلیل منطقی وجود اثبات به‌عنوان یکی از وظایف

اصلی دانش‌آموزان در مدرسه، نقشی است که اثبات در کارهای ریاضی‌دانان برعهده داشته است. (لاکاتوش، ۱۹۷۶؛ راو[۲]، ۱۹۹۹). به خاطر ارتباط نزدیکی که اثبات با شکل گرفتن ایده‌های ریاضی دارد، فعالیت اثبات کردن برای دانش‌آموزان، به اندازهٔ فعالیت‌هایی مانند تعریف کردن، مدل کردن، بازنمایی و حل مسئله، طبیعی به نظر می‌رسد. با این وجود، سوال مهمی که ایجاد می‌شود این است که کلاسی که در آن از دانش‌آموزان انتظار تولید اثبات می‌رود، چگونه باید سازماندهی شود و این اثبات چگونه باید باشد.

این عقیده[۳] که دانش‌آموزان باید گزاره‌هایی را اثبات کنند برای معلمان آمریکایی خیلی هم غریبه نیست؛ چراکه آن‌ها به‌طور سنتی از درس هندسه در دبیرستان برای کمک به توسعهٔ مهارت «اثبات کردن[۴]» دانش‌آموزان استفاده کرده‌اند. این فرهنگ بیش از یک قرن در آمریکا وجود داشته و تأثیر ماندگاری بر طرز تلقی آمریکایی‌ها از اثبات ریاضی داشته است. در نگاه بسیاری از مردم، اثبات، دنباله‌ای از گزاره‌ها و دلایل آن‌هاست که در دو ستون نوشته می‌شوند و نشان می‌دهند که از فرض(ها) چگونه می‌شود حکم را نتیجه گرفت (شکل ۱). تحت تأثیر این فرهنگ اثبات دوستونی[۵]، فعالیت اثبات برای دانش‌آموزان بیشتر از اینکه تمرینی باشد برای تولید استدلال‌های قانع‌کننده برای ایده‌های معقول و مهم ریاضی (بال و بس، ۲۰۰۰؛ شونفیلد ۱۹۸۷)، شبیه یک تمرین منطق بود که برای نشان دادن درستی یک گزارهٔ بدیهی انجام می‌شد (کلاین[۶]، ۱۹۶۵) .

برخلاف انتقادها، دو نکته دربارهٔ اثبات دوستونی قابل توجه است. نخست اینکه، هرچقدر هم که اثبات دوستونی فرهنگ اثبات را فروکاسته باشد، باز هم جایگاهی برای اثبات در مدرسه در طول بیش از یک قرن ایجاد و آن را حفظ کرده است. دوم این‌که، فرهنگ اثبات دوستونی در زمانی بسط و گسترش یافت که در برنامهٔ درسی مدارس، بحث مسئولیت مدارس در قبال فعالیت‌های فکری[۷] دانش‌آموزان بسیار مورد توجه قرار گرفته بود (الیوت و همکاران، ۱۸۹۳؛ نایتینگل[۸] و همکاران، ۱۸۹۹). با در نظر گرفتن این دو ملاحظه، قابل درک است که فرهنگ اثبات دوستونی – چیزی که استدلال و اثبات ریاضی را به ابعاد منطقی و رسمی آن فروکاسته- به‌عنوان یک روش عملی در مدارس توسعه یافته باشد تا این خواسته را که دانش‌آموزان باید قابلیت انجام اثبات را داشته باشند، برآورده سازد.

قابلیتی که بیان شد در مطالعه‌ای که در اینجا گزارش خواهم داد، نمایان شده است. من در اینجا رابطهٔ بین تغییرات چگونگی پردازش متون برنامهٔ درسی، گزارش‌های دانشگاهی[۹] و راهنمای تدریس معلمان برای اثبات در هندسه و تغییرات در دستورالعمل‌های تدریس[۱۰] اثبات در هندسهٔ مدرسه‌ای را (که توسط کتاب‌های درسی تجویز می‌شدند) توضیح می‌دهم. به‌منظور تحلیل آن رابطه‌ها، مقالهٔ حاضر یک بازسازی تاریخی انجام می‌دهد از اینکه چگونه فرهنگ اثبات دو ستونی بین سال‌های ۱۸۵۰ و ۱۹۱۰ تکامل یافت و به جزئی از تدریس هندسه در مدارس تبدیل شد. نشان می‌دهم که چه‌طور همزمان با پررنگ شدن نقش دانش‌آموزان به‌عنوان یادگیرنده، هندسه به‌عنوان یک موضوع درسی تحول یافت و به تکامل رسید و این باور توسعه یافت که باید از دانش‌آموزان انجام اثبات خواسته شود. همزمان که آن باور به یک انتظار از تمام دانش‌آموزان و یک معیار برای توسعهٔ برنامهٔ درسی تبدیل شد، قالب اثبات دوستونی با ترکیب اثبات موجود در کتاب‌های درسی و اثباتی که از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت، به تثبیت هندسه در برنامهٔ درسی کمک کرد.



PROPOSITION XIX. THEOREM

106. *If two parallel lines are cut by a transversal, the corresponding angles are equal.*

[Converse of Prop. XIV.]

Given parallel lines *AB* and *CD* and the cor. ∠s 1 and 2.

To prove $\angle 1 = \angle 2$.

Proof

STATEMENTS	REASONS
$\angle 1 = \angle 3$.	Vertical ∠s are equal.
$\angle 2 = \angle 3$.	Alt. int. ∠s of ∥ lines are equal.
$\therefore \angle 1 = \angle 2$.	Things equal to the same thing are equal to each other.

Q. E. D.

شکل ۱. یک اثبات دوستونی (از کتاب شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳، ص ۵۳)

بررسی کامل این نکته که چگونه مسائل مربوط به موضوع‌های درسی و نقش یادگیرندگی دانش‌آموزان در مرکز توجه قرار گرفتند و بر توسعهٔ فرهنگ اثبات تأثیر داشتند، می‌تواند به ما در مواجهه با چالش‌های اصلاحات امروزی[۱۱] کمک کند. در حالی‌که موضوعات متفاوتی نسبت به دورهٔ اصلاحات یک قرن پیش در معرض خطر قرار دارند، همچنان آن موضوعات برنامهٔ درسی و فعالیت‌هایی را که از دانش‌آموزان انتظار می‌رود شکل می‌دهند. قابل درک است که حرفهٔ معلمی می‌تواند جایی برای اهداف اصلاحات امروزی باز کند اما باید موضوعات دیگر نیز در نظر گرفته شوند و همچنین باید توجه داشت که ممکن است این اصلاحات تأثیرات نظام‌مندی شبیه

به قرن گذشته به همراه داشته باشد. بنابراین همزمان که به توصیه‌های رایج دربارهٔ تغییرات دستورالعمل‌های آموزشی فکر می‌کنیم، تاریخچهٔ چگونگی واکنش نشان دادن این دستورالعمل‌ها به تغییرات برنامهٔ درسی در گذشته، می‌تواند به‌عنوان منابعی از اطلاعات، انگیزه و محرک و همچنین هشدار، مورد استفاده قرار گیرد.

بنابراین پیشنهاد می‌کنم که به تاریخ از زاویه‌ای بنگریم که بتوانیم از آن برای امروز درسی از گذشته بگیریم. در بخش دوم، این نوع نگاه به تاریخ را با ارائهٔ سیمای کلی حرکت اصلاحی یک قرن قبل که منجر شد اثبات دانش‌آموزی به‌عنوان یک استاندارد در آموزش هندسه پذیرفته شود، آغاز خواهم کرد. سپس پیدایش آن استاندارد اثبات دانش‌آموزی را همراه با ارائهٔ تصویری تاریخی از درس هندسه شرح خواهم داد. در بخش سوم، دوره‌ای را توصیف خواهم کرد که در آن اثبات دانش‌آموزی موضوعی نبوده که به صراحت بیان شده باشد. در بخش چهارم، دربارهٔ دوره‌ای گذرا صحبت می‌کنم که در آن اثبات توسط دانش‌آموزان به‌عنوان یک تکلیف قابل اجرا ظهور کرده است. در بخش پنجم، اقدام به ارزیابی اصلاحات پیشنهاد شده از سوی گروهی از ریاضی‌دانان (کنفرانس ریاضی) به کمیتهٔ ده نفره[۱۲] (الیوت و همکاران،۱۸۹۳)، خواهم کرد. در بخش ششم، نشان می‌دهم که چگونه در سال‌های بعد، هندسه به‌طور چشمگیری تغییر می‌کند و تبدیل به درسی می‌شود که در آن دانش‌آموزان باید به اجبار هنر اثبات کردن را یاد بگیرند. سرانجام در بخش هفتم، تفسیری ارائه خواهم کرد از اینکه چرا قالب اثبات دوستونی، مطالعهٔ هندسه را در مدرسه پایدار کرد.

گزارش کمیتهٔ ده‌نفره و مطالعهٔ هندسه

این الزام که دانش‌آموزان در درس هندسه باید «هنر اثبات کردن» را یاد بگیرند، ریشه در گزارش کمیتهٔ ده‌نفره دارد (الیوت و همکاران، ۱۸۹۳). در اواخر قرن نوزدهم، مسائل مربوط به جمعیت دبیرستانی‌ها (اینکه مشتریان دبیرستان چه کسانی هستند و پس از فارغ‌التحصیلی چه خواهند کرد؟) درهم آمیخت و مقدمه‌ای شد برای بحثی راجع به برنامهٔ درسی که سالیان زیادی ادامه یافت (کلایبارد[۱۳]، ۱۹۸۷). کمیتهٔ ده‌نفره، گروهی از رهبران آموزشی[۱۴] بودند که سرگروه آن‌ها چارلز الیوت، رئیس وقت دانشگاه هاروارد بود. این کمیته از سوی انجمن آموزشی ملی[۱۵] مسئول شد که مسائل مربوط به شرایط ورود به دانشگاه‌ها را مورد مطالعه قرار دهد. در آن زمان، اذعان شد که گسترهٔ وسیعی از درس‌ها در دبیرستان‌ها ارائه می‌شود که «به بعضی از آن‌ها زمان کوتاهی اختصاص داده می‌شد که آموزش ناچیزی از آن حاصل می‌شد» (الیوت و همکاران، ۱۸۹۳، ص۵). مأموریت کمیته این بود که این موضوع را بررسی کند که آیا درس‌هایی که مدارس ارائه می‌دهند باید بر اساس علاقهٔ دانش‌آموزان باشد و پس از آن بگوید که چه دروسی باید در دبیرستان آموزش داده شوند و همچنین شیوهٔ تدریس آن‌ها به چه روشی باشد***.

تاریخ‌نگاران دربارهٔ کارهای کمیتهٔ ده‌نفره و تأثیر آن‌ها بر شکل‌گیری آموزش آمریکا، بسیار نوشته‌اند (کلایبارد، ۱۹۸۷؛ کروگ[۱۶]، ۱۹۶۴؛ راویچ، ۲۰۰۰؛ سیزر[۱۷]، ۱۹۶۴). جورج استانیک[۱۸] (۱۹۸۳ و ۱۹۸۷)، نشان داد که چگونه بحث‌هایی که آن زمان راجع به برنامهٔ درسی شکل گرفت، نیاز دائمی به مطالعهٔ ریاضی مدرسه‌ای را تحمیل کرده است. آیلین دونوقو[۱۹] (۱۹۸۷) شرح داد که چگونه بعضی از نتایج آن بحث‌ها در شکل‌گیری برنامه‌های آموزش معلمان تأثیر داشته‌اند. اگرچه تاریخ نوشته شده در آن زمان، شامل دورهٔ تأثیرگذاری آن گزارش بر تدریس هندسه (نسبتاً با جزئیات) می‌شود (کواست[۲۰]، ۱۹۶۸؛ شیبلی[۲۱]، ۱۹۳۲)، اما آن‌ها مراحل تکامل اثبات در درس‌های مدرسه‌ای را به دقت مورد مطالعه قرار نداده‌اند. هدف من هم نوشتن یک تاریخ جامع از آن دوره نیست. در عوض، می‌خواهم از تاریخ موجود و برداشت‌های شخصی‌ام از منابع (متون برنامهٔ درسی، کتاب‌های درسی هندسه و مقاله‌های تحقیقی) استفاده کنم و یک بازسازی تاریخی ارائه دهم از چگونگی تکامل جایگاه اثبات در درس هندسه، هنگامی‌که حرفهٔ معلمی به برنامهٔ درسی منتشر شده توسط کمیتهٔ ده‌نفره واکنش نشان می‌داد. بحرانی که در کار کمیتهٔ ده‌نفره وجود داشت ناشی از این مسئله بود که آیا برنامهٔ درسی باید قوای ذهنی را پرورش دهد یا باید انتقال‌دهندهٔ مطالب کتاب‌ها باشد (بیکر[۲۲]، ۱۸۹۳/۱۹۶۹؛ الیوت و همکاران، ۱۸۹۳/۱۹۶۹؛ الیوت، ۱۹۰۵؛ هریس[۲۳]، ۱۸۹۴). کمیتهٔ ده‌نفره از نظرات گروه کنفرانس ریاضی استفاده می‌کرد؛ گروهی که ریاست آن را استاد ریاضی دانشگاه جان هاپکینز، به‌نام سیمون نیوکمب[۲۴]، در اختیار داشت و شامل پنج ریاضی‌دان دیگر، دو مدیر مدرسه و دو معلم ریاضی بود. این گروه یک گزارش تهیه کرد که شامل توصیه‌ها و یافته‌های مهمی برای تدریس هندسه بود. این توصیه‌ها بستری را برای انتقال بخشی از دانش هندسه به دانش‌آموزان آماده می‌کرد، که در آن فرهنگ، با ارزش به حساب می‌آمدند. البته این نکته را هم آورده بودند که باید مطالعاتی دانشگاهی انجام پذیرد تا پرورش

قـوای ذهنی به‌عنوان یک معیار برای شـکل دادن برنامهٔ درسـی دبیرسـتان، در نظر گرفته شـود. بر اسـاس آن توصیه‌ها، کمیتهٔ ده‌نفره تشـخیص داد که درس هندسه در دبیرسـتان باید وسیله‌ای باشد که دانش‌آموزان توسط آن هنـر اثبات[۲۵] را یـاد بگیرند: «برای اثبات هندسـی[۲۶] به‌عنـوان یـک درس شـامل گزاره‌هایی کامـل، دقیق و منطقی، باید ارزش زیادی قائل شـد» (الیوت و همکاران، ۱۹۸۳/۱۹۶۹، ص ۲۵).

کمیتـهٔ ده‌نفره اسـتدلال می‌کرد کـه دانش‌آموزان اثبات‌های کتاب‌های درسی را فقط حفظ می‌کنند و بحث پرورش قوای ذهنی که مبحث هندسـه امکان‌پذیر کرده، عملاً به فراموشـی سپرده شده اسـت. در واقع تغییرات آموزشـی نیاز بود تا هندسه بتواند وظیفه‌ای را که داشت انجام دهد. این حقیقت که دانش‌آموزان متون درسـی را حفظ می‌کردند نه جدید بود و نه به سادگی قابل رفع بود؛ چیزی که جدید بود به رسـمیت شـناختنِ مشکل‌آفرین بودنِ این‌گونه امور بود که برای درس هندسـه چالشـی جـدی ایجاد کرده بود. برای نشـان دادن تغییرات ایجاد شده در تکلیف دانش‌آموزان که منجر به پیدایش فرهنگ اثبات دوسـتونی شـدند، سـه دورهٔ مهـم را در مطالعهٔ هندسـه ترسـیم خواهم کـرد. نخسـت دورهٔ ابتدایی و مبداء را مشـخص می‌کنم که مشخصهٔ بارز آن بازنویسیِ اثبات‌های داخل کتاب توسـط دانش‌آموزان بود، سـپس یک دورهٔ گـذار را معرفی می‌کنم که در آن دانش‌آموزان برای حکم‌های هندسـی اثبات تولید می‌کردند، و در آخر دورهٔ پایانی را شـرح می‌دهم کـه در آن دانش‌آموزان یاد می‌گرفتند که چگونه اثبات انجام دهند. برای درک میزان تغییراتی که توسـط کمیتهٔ ده‌نفره توصیه شده بود، بهتر است کمی به عقب برگردیم و کارمان را با معرفی اجمالی مشخصات درس هندسـه‌ای شروع کنیم که در آن زمان مدارس شروع به‌تدریس آن کرده بودند.

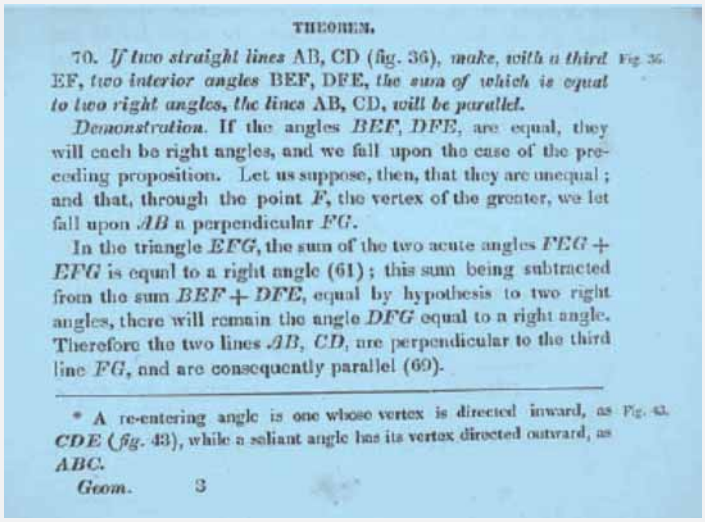
دورهٔ متن [کتـاب اقلیـدس][۲۷]: بازسازی اثبات

همزمـان که دانشـگاه‌ها در سـال‌های دهـهٔ ۱۸۴۰ درس هندسـه را پیش‌نیاز پذیرش دانشجویان قرار دادند، دبیرسـتان‌های آمریکا شـروع به ارائهٔ ایـن درس نمودند (کواست، ۱۹۶۸، ص ۳۶). طی این دوره، که من آن را دورهٔ متن [کتاب اقلیدس] می‌نامم، مطالعهٔ هندسـه مسـتلزم یادگیری دانشـی از هندسه بود که در کتاب اقلیدس ارائه شـده بود. کتاب‌هـای معروفی که چنیـن هدفی را دنبال می‌کردند عبارت بودند از اصول اقلیدس اثر رابرت سیمون (۱۷۵۶)، اصول هندسـه اثر جان پلی‌فر[۲۸] (۱۷۹۵/۱۸۶۰) و اصول هندسه اثر آن- ماری لژاندر که توسط جان فارر[۲۹] در سـال ۱۸۱۹ ترجمه و ویرایش شـده بـود. اگرچه این سـه کتاب در نحـوهٔ ارائهٔ دانش هندسـه تفاوت‌های قابل توجهی داشـتند (جونز، ۱۹۴۴)، امـا دانش‌آموزان پس از مطالعهٔ آن‌ها تصویر مشابهی از اثبات و مفهوم آن به‌دست می‌آوردنـد. دانش‌آموز به‌عنـوان خواننده‌ای در نظر گرفته می‌شد که رابطه‌اش با اثبات بر مبنای ارزش‌هایی بنا شود که بتوان آن‌ها را ریاضی نامید. در مورد خواسـته‌هایی که مطالعهٔ این کتاب‌ها بر دانش‌آموزان تحمیل می‌کرد و اینکه آن‌ها چگونه باید این خواسـته‌ها را برآورده کنند، نگرانی خاصی دیده نمی‌شد. برای مثال، مواد درسی هر سه کتاب براسـاس این نکته که دانش هندسـه را براساس کمترین اصول بنا کردن امری ارزشمند است، تهیه شده بود و فقط وقتی از اصول بیشـتری استفاده می‌شد که از نظر ریاضی ناگزیر بود. اثبات‌های ارائه شده نیز براساس نکتهٔ ذکر شده گردآوری شده بودند و میزان سختی و طولانی بودن آن‌ها اهمیت چندانی نداشـت. بر همین اساس فارر در ویرایش سال ۱۸۴۱ کتاب لژاندر، برای قضیهٔ مجموع زوایای مثلث، یک اثبات طولانی‌تر و پیچیده‌تـر از اثبات اقلیدس ارائه و افتخار کرده بود کـه در این اثبات از قضیهٔ خطوط موازی اسـتفاده نشده اسـت (ر.ک. به فارر، ۱۸۴۱، ص iv). این موضوع که دانش‌آموزان بدانند (و بتوانند نشـان دهند) که درسـتی قضیهٔ مجموع زوایای مثلث مستقل از قضیه‌های مربوط به خطوط موازی اسـت، موضوعی ارزشمند به‌نظر می‌رسـید. در واقع اینکه دانش‌آموزان برای یادگیری این اثبات، نسـبت به اثبات معروف اقلیدس که براساس توازی بنا شـده بود، چه‌قدر بیشـتر باید تلاش کننـد، اهمیتی نداشت.

پلی‌فر در مقدمهٔ کتابش مشخص می‌کند که چه نوع از نگرانی‌های آموزشـی باعث این نوع نگارش کتاب شده اسـت. «هدف اثبات ریاضی فقط اثبات درستی یک‌سری حکم بدیهی نیسـت، بلکه باید نشـان داد که هر حکم به حکم‌های دیگر چه ارتباط‌ها و چه وابسـتگی‌هایی دارد». (پلی‌فر، ۱۷۹۵/۱۸۶۰، ص xiv).

به این ترتیب، هندسـه به‌عنوان بدنه‌ای سازمان‌یافته از دانش (همان‌طور که در کتاب اقلیدس بیان شـده بود) که باید آموخته شود، در نظر گرفته شد. هدف از مطالعهٔ هندسه در دبیرستان درک مشخصه‌های اصلی روابط بین اشـیاء هندسی بود. برای رسیدن به چنین هدفی مطالعهٔ اثبـات آن روابط ضروری به نظر می‌رسـید. کلمهٔ *نشـان دادن* [اثبات کردن] در کتاب اسـتفاده شـده بود، اما نه به‌عنوان اسم یک شیء که باید مطالعه شود، و نه به‌عنوان یک مهارت که باید آموزش داده شـود. درک معنیِ نشان دادن، از راه دیـدن اثبات‌های خاصـی که در کتاب بیان شـده بود، میسـر بود. در واقع اثبات هر حکمی به‌نوعی منحصر بـه فرد بود و اسـتدلال‌هایی را بیان می‌کرد که

برای نشـان دادن درسـتی آن حکم براساس گزاره‌هایی که از قبل درسـتی آن‌ها پذیرفته شده بود، نیاز بود. این کتاب‌ها حرفی از روش‌های اثبات کردن نمی‌زدند و اثبات را نیـز در حالت کلی توصیـف نمی‌کردند. اثبات در قالب یک پاراگراف که ازجملات بلند و پیچیده تشکیل می‌شد، ارائه شده بود. فقط تعدادکمی از گزاره‌ها به اصول، تعاریف و قضایـای مربوطه ارجـاع می‌دادند و در عوض بیشـتر گزاره‌ها با آوردن حکم‌های قبلی به‌صورت ضمنی از آن‌ها اسـتفاده می‌کردند (شکل ۲). این‌طور به نظر می‌رسد که هر کدام از *گزاره‌ها* باید با یک دلیل آشکار حمایت شوند چراکه بیان کردن این دلیل بخشی از بینشی بود که باید در طی خواندن اثبات به‌دست می‌آمد.



THEOREM.

70. *If two straight lines* AB, CD (fig. 36), *make, with a third* EF, *two interior angles* BEF, DFE, *the sum of which is equal to two right angles, the lines* AB, CD, *will be parallel.* Fig. 36.

Demonstration. If the angles *BEF*, *DFE*, are equal, they will each be right angles, and we fall upon the case of the preceding proposition. Let us suppose, then, that they are unequal; and that, through the point *F*, the vertex of the greater, we let fall upon *AB* a perpendicular *FG*.

In the triangle *EFG*, the sum of the two acute angles *FEG* + *EFG* is equal to a right angle (61); this sum being subtracted from the sum *BEF* + *DFE*, equal by hypothesis to two right angles, there will remain the angle *DFG* equal to a right angle. Therefore the two lines *AB*, *CD*, are perpendicular to the third line *FG*, and are consequently parallel (69).

* A re-entering angle is one whose vertex is directed inward, as *CDE* (*fig.* 43), while a saliant angle has its vertex directed outward, as *ABC*. Fig. 43.

Geom. 3

شکل۲. یک نمونه اثبات از دورهٔ متن (از کتاب لژاندر، ۱۸۴۱، ص ۱۷)

مطالعهٔ هندسـه از راه خواندن و بازسـازی اثبات‌های کتاب انجام می‌شـد، این‌کار قوهٔ استدلال دانش‌آموزان را تقویت می‌کرد. اما کتاب‌ها، روشی رسمی بیان نمی‌کردند که تکامل قوهٔ استدلال دانش‌آموزان چگونه باید شناسایی و هدایت شود. دانستن هندسه از توانایی اثبات قضیه‌های هندسـی، قابل تمایز نبود. در واقع از نظر مدارس، تفاوت زیادی بین دانسـتن هندسـه و حفظ کردن متن کتاب، وجـود نداشـت (کواسـت، ۱۹۶۸، ص ۴۰). همزمان که درس هندسـه در دبیرسـتان‌ها فراگیر می‌شـد، آموزش هندسـه در حـال تغییر بود و از این شـیوه که فقط متنِ کتاب‌های تدریس شده، بازتولید شود، فاصله می‌گرفت.

دورهٔ کارهای اصیل: تولید اثبات

حدود چند دهه قبل از شروع به کار کمیتهٔ ده‌نفره و با افزایش تعداد دبیرسـتان‌هایی که درس هندسه را ارائه می‌دادند، تعداد کتاب‌های هندسه بیشتر شد و تغییراتی نیز در آن‌ها پدیدار گشـت (شـیبلی، ۱۹۳۲، ص ۱۰۷). بنجامین گرین‌لیف[۳۰] یکی از اولین نویسندگان آمریکایی بود که یک کتاب هندسه برای تدریس در مدرسه نوشت. وی در پیش‌گفتارش آورده اسـت که «هدفم سازگاری با جدیدترین و مورد قبول‌ترین روش‌های آموزشی است».

بخشـی از این تغییرات در واکنش به تغییر نگرشـی بود که نسبت به دانش‌آموزان اتفاق می‌افتاد. نگرشِ رایج آن دوره، همان‌طـور که چارلز دیویـس[۳۱] نیز بیان کرده، دانش‌آموزان را به‌عنـوان «خردهای پرورش نیافته‌ای[۳۲]» در نظـر گرفته که افزون بر حقایق هندسـی، باید روابط منطقی بیـن آن‌ها را نیز درک کننـد (دیویس، ۱۸۵۰، ص ۲۵۸- ۲۵۶). دانش‌آمـوزان علاوه بـر اینکه موظف بودنـد اثبـات حکم‌های ارائه شـده در کتاب درسـی را بازتولید کنند، باید برای حکم‌های اصیل نیز، اثبات تولید می‌کردند. در بخش‌های بعدی نشـان خواهم داد که این کارهـای اصیل چگونه پدید آمدنـد و چه عناصر دیگری همزمان به‌وجود آمدند تا این کارها جایشـان را در برنامهٔ درسی باز کنند.

پدیدار شدن حکم‌های اصیل برای اثبات توسط دانش‌آموزان

کتاب‌هایی که توسـط گرین لیـف (۱۸۵۸) و بعدتر ویلیام شاونه[۳۳] (۱۸۷۰) نوشته شدند، بر خلاف کتاب‌های دورهٔ قبل، شـامل تمرین‌هایی برای اثبات بودند. از آن‌جا که این تمرین‌ها فرصت‌هایی بـرای انجام کارهای اصیل توسـط دانش‌آموزان بودند، من این زمان را دورهٔ *کارهای اصیل* نامیدم. این تمرین‌ها شامل نتایج فرعیِ حکم‌هایی بود که در کتاب اثبات شده بودند و همچنین قضیه‌هایی اضافـی که در متن اصلی کتاب جایی نداشـتند. در واقع در ایـن دوره فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان مهیا شـده بود که با اسـتفاده از نیروی استدلالشـان، دانش هندسهٔ خود را تقویـت کنند. ویلیام بیرلـی[۳۴] در مقدمهٔ یکی از ویرایش‌های بعدی کتاب شـاونه (۱۸۸۷) بیان کرده که هـدف از کارهای اصیل این بود که «دانش‌آموزان مجبور شـوند خودشان فکر کنند و دلیل بیاورند»؛ کاری فراتر از اینکه «مجموعه‌ای از حکم‌ها را یاد بگیرند و اثبات‌شـان را نشـان بدهند» (ص ۵). به نظر می‌رسـد تغییراتی که در کتاب‌های بعدی این دوره اتفاق می‌افتاد در پاسـخ به این هدف بـود که «دانش‌آموزان توان درک و ارائهٔ اثبات برای حقایق سـادهٔ هندسـی را داشته باشند»، توانی که «با حفظ کردن اثبات‌های هندسـی به‌دسـت نمی‌آمد»

(شاونه، ۱۸۸۷، ص ۵). در همان راستا، جورج ونت‌ورث[۳۵] (۱۸۸۷) در پایان هر فصل از کتابش فهرستی بلند از تمرین‌های اصیل قرار داده بود و حتی تعدادی از این تمرین‌ها را در ویرایش بعدی کتابش(۱۸۸۸)، لابه‌لای حکم‌های آن فصل آورده بود.

حضور کارهای اصیل با این فرض بود که دانش‌آموزان شیوهٔ استدلال کردن را با تمرین کردن استدلال یاد بگیرند. اما آن‌چه که باید درباره‌اش استدلال کنند (چه نوع حکم‌هایی را باید اثبات کنند) نخست به این نکته بستگی دارد که چه مطالبی باید در درس وجود داشته باشد و بعد اینکه دانش‌آموزان چه ایده‌ها و روش‌هایی را باید بدانند و قابلیت استفاده از آن‌ها را داشته باشند. برای اثبات این حکم‌های اصیل، شخص باید مهارت و ابتکاری بالا داشته باشد در حدی که بتواند قضیه‌هایی را که در متن کتاب آمده است خودش اثبات کند. با نزدیک شدن به دورهٔ کمیتهٔ ده‌نفره، اینکه دانش‌آموزان باید موضوع درسی را خود بررسی و کشف کنند، برای برآورده کردن این هدف که ذهن دانش‌آموزان تربیت شود، در اولویت قرار گرفت. بنابراین، ونت ورث (۱۸۸۸) در تقابل با پیشنهاد کتاب‌های قبلی، خاطر نشان کرد که تمرین‌های اصیلی که در کتاب قرار داده «خیلی سخت نیستند... اما آزمون مناسبی برای تشخیص میزان یادگیری و تسلط دانش‌آموزان بر مواد درسی ارائه شده می‌باشند» (ص iv).

همزمان که این تمرین‌های اصیل در کتاب‌های درسی و بحث‌های مربوط به مطالعهٔ هندسه، مهم و برجسته می‌شد، جنبه‌های دیگری نیز نمایان می‌شدند. از یک سو، به دانش‌آموزان نباید فقط فرصت اثبات یک‌سری حکم داده شود؛ بلکه باید منابعی تهیه کرد که آن‌ها را قادر به انجام اثبات کند. در بخش بعدی نمونه‌ای از این بحث را با بیان کردن تغییر رسم شکل در کتاب‌ها، شرح خواهم داد. از سوی دیگر، نحوهٔ تولید اثبات توسط دانش‌آموزان باید از طریق بیان صریح‌تر و دقیق‌تر مشخصه‌های اثبات، هدایت و کنترل شود. در دو بخش بعدتر، نشان می‌دهم که چگونه کتاب‌های درسی استخوان‌بندی یک هنجار را برای اثبات کردن، گسترش دادند. در هردو مورد- منابع و هنجارها- بیان خواهم کرد که چگونه این ویژگی‌ها، بر ماهیت موضوع‌های مورد مطالعه تأثیر گذاشتند.

شکل‌هایی که دانش‌آموزان را قادر به انجام اثبات کرد: رسم‌های فرضی[۳۶]

بعد از کتاب لژاندر، همراه شدن با عادت جدیدِ کشیدن شکل، برای مؤلفان کتاب‌ها، امری عادی محسوب می‌شد. دیویس (۱۸۴۸)، گرین‌لیف (۱۸۵۸) و شاونه (۱۸۷۰) برای نمایش تغییر شکل‌های (ترسیم‌های) انجام شده هنگام بیان اثبات، از نقطه‌چین استفاده می‌کردند. این‌کار برای ایجاد تمایز با خط‌هایی که برای نشان دادن فرض‌ها و حکم مسئله رسم شده بود، انجام می‌شد. گرین‌لیف برای تمرین‌های کتابش شکل نکشید، در حالی که شاونه این کار را کرد و هدفش را نیز چنین بیان کرد: برای اینکه سخت شدن مسائل تدریجی و گام به گام باشد، و دانش‌آموزان در تمام مسیر پیشرفت‌شان بتوانند درک و فهم نسبتاً خوبی از مسائل داشته باشند، بسیاری از تمرین‌ها به همراه شکل‌شان آورده شد که در آن‌ها خط‌های (تغییر شکل‌های) کمکی نیز رسم شدند (شاونه، ۱۸۷۰، ص ۲۹۳).

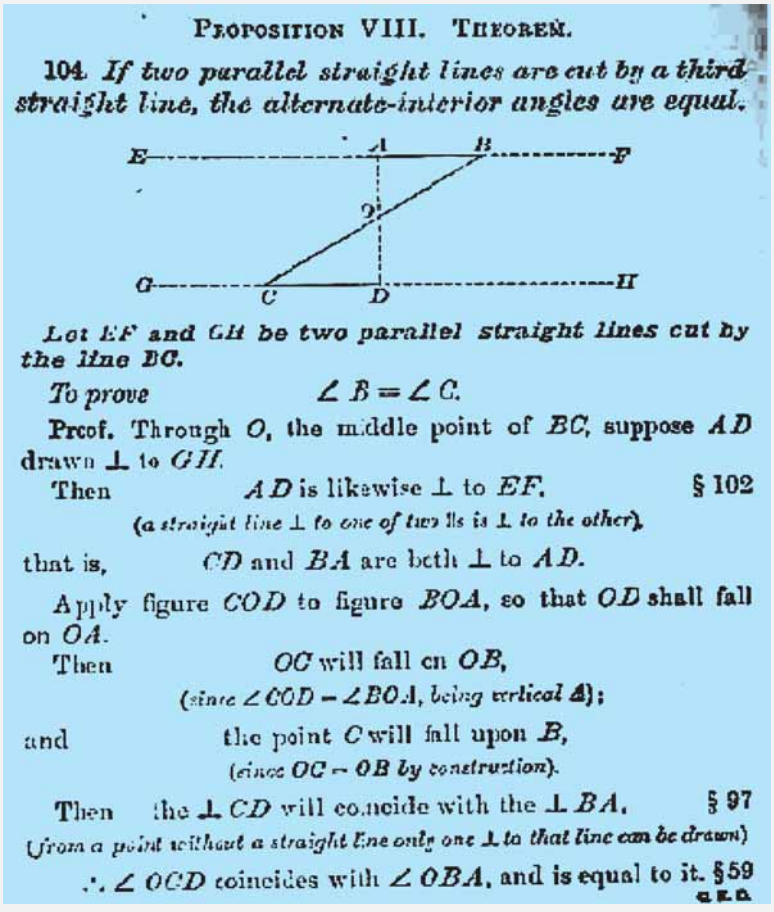
ونت‌ورث نیز تغییراتی را در شکل‌هایی که برای حکم‌ها ارائه کرده بود، اعمال نمود. علاوه بر خط‌های ممتد و نقطه‌چین‌ها، ونت‌ورث (۱۸۷۸، ص iii) گروه سومی از خط‌ها را نیز اضافه کرد: «خط‌هایی که جزء فرض‌های[۳۷] مسئله‌اند با خط ممتد، خط‌هایی که کمکی[۳۸]اند با نقطه‌چین و خط‌هایی که نتایج[۳۹] را نشان می‌دهند با خط‌چین، مشخص شده‌اند». گاهی‌اوقات منشاء آن خط‌های کمکی مشکل‌آفرین بود. اوگن ریچاردز[۴۰] استاد ریاضی دانشگاه ییل، در نقدی که بر روش‌هایی که بعدها به روش‌های نو در هندسه معروف شدند، وارد می‌کند، «نحوهٔ چینش و ترتیب حکم‌ها» در هندسهٔ جدید را هدف نقد خویش قرار می‌دهد (ریچاردز، ۱۸۹۲، ص ۳۳). از نظر وی این کار «مداخله در نظم و ترتیب طبیعی توسعهٔ مطالب» بود که وجود بعضی از ترسیم‌های فرضی مشکل‌آفرین را ضروری می‌ساخت:

> به دانش‌آموزان گفته می‌شود که یک پاره‌خط به اندازهٔ پاره‌خط دیگر یا یک زاویه برابر زاویهٔ دیگر رسم کنند... بدون آن‌که چگونگی این ترسیم‌ها به آن‌ها تدریس شده باشد. ... [هندسهٔ جدید] به دانش‌آموزان نمی‌گوید که چه ترسیم‌هایی را می‌توانند انجام دهند. ... اثبات حکم‌های مشخصی را به‌وسیلهٔ ترسیم‌های فرضی انجام می‌دهند و از دانش‌آموزان می‌خواهند که مسائل را با قضیه‌هایی که واقعاً مربوط هستند، اثبات کنند. مسائل را با استفاده از قضیه‌هایی اثبات می‌کنند که قبلاً به وسیلهٔ مسائل اثبات شده‌اند. این کارها شاید یک دسته‌بندی خوب باشد اما نه می‌توان آن را هندسه نامید نه یک منطق خوب (ریچاردز، ۱۸۹۲، ص ۳۴؛ همچنین ر.ک. به هالستد[۴۱]، ۱۸۹۳).

اما در پاسخ به مقالهٔ ریچاردز، جورج شوتز[۴۲] (۱۸۹۲) استفاده از ترسیم‌های فرضی را قابل دفاع می‌دانست چراکه آن‌ها «رابطه‌هایی را که لازم است برای تسهیلِ

انجام اثبات به آن‌ها توجه شود، قابل رؤیت می‌کنند» (ص ۲۶۵). از یک سو، واضح است که آنچه در مورد هندسهٔ جدید در معرض خطر است، شرایطی نیست که تحت آن‌ها حکم‌های معینی درست و یا ترسیم‌های مشخصی قابل رسم هستند، بلکه، هندسهٔ جدید به دنبال کوتاه‌ترین راه برای رسیدن به نتیجه است. ... پرورش ذهن از راه انجام تمرین‌های فکری برای رسیدن به حقیقت به دست می‌آید و اهمیت موضوع بحث کمتر از اهمیت این نکته است که درست را از غلط تمیز دهند و به‌طور منطقی مسیری را که به نتیجه می‌رسد دنبال کنند. (شوتز، ۱۸۹۲، ص ۲۶۴)

از سوی دیگر، استفاده از ترسیم‌های فرضی به دلیل ناآگاهی نویسندگان کتاب‌ها از هندسه نبود بلکه در پاسخ به نیازی بود که در روش تدریس احساس می‌شد: فراهم کردن اصولی که دانش‌آموزان در ترتیب دادن اثبات به آن‌ها نیاز داشتند. بنابراین پیدایش این «ترسیم‌های فرضی» برای این پژوهش حائز اهمیت است چراکه نمونه‌ای است که نشان می‌دهد چگونه سیستم آموزشی، به‌رغم تغییرات غیرقابل چشم‌پوشی که این اقدامات بر ماهیت هندسهٔ مدرسه‌ای تحمیل می‌کنند، درصدد



PROPOSITION VIII. THEOREM.

104 *If two parallel straight lines are cut by a third straight line, the alternate-interior angles are equal.*

Let EF and GH be two parallel straight lines cut by the line BC.

To prove $\angle B = \angle C$.

Proof. Through O, the middle point of BC, suppose AD drawn $\perp$ to GH.

Then AD is likewise $\perp$ to EF. § 102

(*a straight line $\perp$ to one of two lls is $\perp$ to the other*),

that is, CD and BA are both $\perp$ to AD.

Apply figure COD to figure BOA, so that OD shall fall on OA.

Then OC will fall on OB,

(*since $\angle COD = \angle BOA$, being vertical $\measuredangle$*);

and the point C will fall upon B,

(*since $OC = OB$ by construction*).

Then the $\perp$ CD will coincide with the $\perp$ BA. § 97

(*From a point without a straight line only one $\perp$ to that line can be drawn*)

$\therefore$ $\angle OCD$ coincides with $\angle OBA$, and is equal to it. § 59

Q.E.D.

شکل ۳. یک نمونه اثبات از دورهٔ کارهای اصیل (از کتاب ونت‌ورث، ۱۸۸۸، ص ۲۴)

فراهم کردن منابعی برای دانش‌آموزان است که بتوانند فرآیند اثبات را انجام بدهند. در واقع، هندسهٔ مدرسه‌ای به تدریج تبدیل به رفتاری منطقی بین مجموعه‌ای از اشیا می‌شد که وجود و درستیِ آن‌ها مفروض و مستقل از استدلال‌هایی بود که در مواجهه با آن‌ها آورده می‌شد. این جداسازی برای دسته‌بندی مطالب، در نظر گرفته شدن سهمی از کار برای دانش‌آموزان، و همچنین فراهم کردن منابعی برای تولید اثبات توسط دانش‌آموزان، سودمند بود. همزمان با اینکه ترسیم‌های فرضی به‌عنوان منابعی برای دانش‌آموزان جهت تولید اثبات محسوب می‌شدند، یک قاعده (هنجار) برای نظارت معلمان روی کارهای دانش‌آموزان در حال شکل گیری بود.

پیدایش یک قاعدهٔ عمومی برای اثبات

دیویس (۱۸۵۰) در کتابی که دربارهٔ تدریس ریاضیات نوشته بود، پیشنهاد کرده بود که معلمان همزمان که گزاره‌هایی را برای اثبات قضیه‌ها بیان می‌کنند، به دلایل هرکدام از آن‌ها نیز اشاره کنند. با این همه، نه در کتاب لژاندر که توسط دیویس (۱۸۴۸) ویرایش شده بود و نه در کتاب‌های گرین‌لیف و شاونه، این موضوع لحاظ نشده بود. آن‌ها اثبات را به‌صورت پاراگراف‌هایی می‌نوشتند که فقط دلیل بعضی از گزاره‌ها در آن‌ها دیده می‌شد. اولین بار ونت‌ورث (۱۸۷۸) تغییراتی در جنبه‌های مختلف یک کتاب درسی هندسه ایجاد کرد (شیبلی، ۱۹۳۲، ص ۱۴۴). او خود را ملزم کرد که جهت تسهیل درک و فهم قضیه‌ها، هر کدام از قضیه‌ها را به همراه اثباتش در یک صفحهٔ جداگانه بیاورد. در واقع او ملاحظات جدیدی را در مورد قالب نوشتن یک اثبات معرفی و تجویز کرد، بدین ترتیب که دلیل درستی هر مرحله از اثبات با قلمی کوچک‌تر، بعد از آن مرحله و قبل از مرحلهٔ بعد آورده می‌شود. این کار باعث می‌شود عمل ارجاع دادن به بخش‌های قبلی در فرآیند اثبات وقفه‌ای ایجاد نکند. ... علاوه بر این، هر ادعای جدید در اثبات ... از یک خط جدید شروع می‌شود. ... این روش مزایای مشهودی در پی دارد. دانش‌آموزان در هر مرحله می‌توانند بی‌درنگ به شکل مراجعه کنند، ... و با وجود جملات ساده‌تر و دقیق‌تر، به‌سرعت اثبات را یاد بگیرند. (ص iv)

اثبات‌های این کتاب، به خاطر شرایط بیان شدن‌شان که در مراحل یا خط‌های جداگانه نوشته شدند، با جمله‌های کوتاه‌تری ارائه شدند (شکل ۳ را ببینید). هر خط آن اثبات‌ها با دلایل درستی‌اش همراه بود: شماره‌ای که در کنار هر خط نوشته شده بود به یک پاراگراف

(معمولاً یک قضیه) ارجاع می‌داد که گزارهٔ نوشته شده را حمایت می‌کرد، و جمله‌ای که زیر آن گزاره نوشته می‌شد نحوهٔ حمایت را نشان می‌داد.

در تقابل با اثبات‌های «دوران متن»، در اثبات‌هایی که ونت‌ورث (۱۸۷۸) و نویسندگان بعدی ارائه کردند، آن‌ها به یک قالب نمایش وفادار بودند که مشخص می‌کرد منظور از یک اثبات منطقی چه می‌تواند باشد. برداشت ونت‌ورث از «فرآیند استدلال (آوردن برهان)» به‌عنوان بخش اصلی اثبات (که شامل استدلال و ارجاعات می‌شد)، استفاده از آن قاعدهٔ عمومی را مورد توجه قرار می‌داد. اثباتِ (برهان) خوب در چارچوبی تجویزی (گزاره‌هایی که در هر خط نوشته می‌شد، ارجاعات) فراهم می‌شد که به نظر می‌رسید اثبات ارائه شده توسط آن، قابل درک و فهم می‌باشد. این حقیقت که دانش‌آموز پس از هر گزاره دلیل درستی آن را بیان کند، برای معلمان این معنی را داشت که دانش‌آموز با داشتن کل اثبات، برهان را درک کرده است (همچنین ر.ک.ولز[۴۳]، ص viii).

اثبات دانش‌آموزی

در آن زمان اصولی وجود داشت که امکان انجام اثبات را برای دانش‌آموزان فراهم کند. دانش‌آموزان باید هم استدلال کردن و هم حقایق قطعی را تعلیم ببینند و این یادگیری می‌توانست به وسیلهٔ مطالعهٔ هندسه انجام بگیرد. اما آن آموزش به‌صورت خودبه‌خودی و به‌عنوان یک نتیجهٔ فرعیِ مطالعهٔ متن هندسه اتفاق نیفتاد. برای اجرایی کردن چنین آموزشی، دانش هندسه باید به درون متون هندسهٔ مدرسه‌ای منتقل می‌شد؛ به‌ویژه باید تصویری از هندسهٔ مدرسه‌ای به‌عنوان مجموعه‌ای سازماندهی شده از حقایق دربارهٔ خط و صفحه، ایجاد می‌کرد. هر کدام از آن حقایق با توجه به اصول منطقی استدلال استنتاجی توجیه می‌شد، اگرچه این نگاه که چنین استدلال‌هایی در تولید آن حقایق سهم دارند، مربوط به قبل، یعنی دورهٔ متن بود. در آن زمان اثبات دانش‌آموزی وسیله‌ای بود که با آن، آموزش مورد نظر، قابل نظارت بود، که معمولاً در دو موقعیت اتفاق می‌افتاد: (۱) بیان اثبات (فهمیدن اثبات) حکم‌های متن اصلی کتاب و (۲) اثبات حکم‌های اصیل که به‌عنوان تمرین در کتاب وجود داشتند. آن موقعیت‌ها لزوماً متفاوت نبودند، چرا که هر دوی آن‌ها مستلزم تمرین دادن قوهٔ استدلال و فراگیری دانش جدید بودند.

همزمان که زمان دورهٔ کمیتهٔ ده‌نفره نزدیک می‌شد، اثبات دانش‌آموزی نه تنها به‌عنوان وسیله‌ای مناسب برای پرورش ذهن پیشنهاد می‌شد، بلکه مورد مطالعه و گسترش نیز قرار می‌گرفت. زمانی که آگاهی از توصیهٔ کمیتهٔ ده‌نفره، اثبات دانش‌آموزی را تبدیل به یک نیاز کرد، گروه کنفرانس ریاضی از انطباق‌های آموزشی که در دوران کارهای اصیل انجام شده بود، به‌طور جدی استفاده می‌کرد.

توصیه‌های گروه کنفرانس ریاضی دربارهٔ تدریس هندسه

چالش اصلی کمیتهٔ ده‌نفره، یافتن راهی برای همساز کردن و تجمیع مطالعات متنوع و ایجاد یک برنامهٔ درسی بود که در آن تمام دانش‌آموزان در نظر گرفته شده باشند (راویچ، ۲۰۰۰، ص ۴۲). این باور که دانش‌آموزان باید در معرض آموزش علوم انسانی قرار بگیرند، علومی که شاید بتوانند ذهن را باز کنند و خرد را پرورش دهند، به اندازهٔ کافی قوی نبود. رشته‌های جدید راه خود را برای ورود به برنامه درسی مدارس باز می‌کردند، اما اصلاح‌گران آموزشی نگران سنگین شدن و در نتیجه کم اثر شدن برنامه درسی بودند. دکترین پرورش ذهن تبدیل به ابزاری برای آموزشگران عمومی شده بود که به وسیلهٔ آن بتوانند موضوعات مختلفی را که امکان راهیابی به برنامهٔ درسی داشتند، با یکدیگر مقایسه کنند تا به یک برنامهٔ درسیِ بهینه برسند (ر.ک. هریس، ۱۸۹۴). بنابراین «ارزش آموزشیِ ریاضیات» در این نکته دیده شد که «قوای درک، تشخیص و استدلال ذهن را پرورش دهد» (هیل، ۱۸۹۵، ص ۳۵۳). در حالی‌که علوم‌تجربی می‌خواهند روش‌های استقرایی را به دانش‌آموزان تعلیم دهند، «در هندسهٔ رسمی، ما بهترین عرصهٔ ممکن را برای آموزش استدلال‌های استنتاجی داریم» (هیل، ۱۸۹۵، ص ۳۵۴). در نتیجه، پرورش ذهن، که قبلا برای توجیه مطالعهٔ ریاضیات استفاده شده بود، به‌طور رسمی به‌عنوان معیاری برای تصمیم گیری دربارهٔ آنچه که باید در ریاضیات مطالعه شود، مورد استفاده قرار گرفت (نیوکمب و همکاران، ۱۸۹۳، ص ۱۰۵).

گروه کنفرانس ریاضی (نیوکمب و همکاران، ۱۸۹۳) توصیه کرد که در برنامهٔ درسی هندسه به منظور تجمیع و ایجاد هماهنگی بین پرورش قوای ذهنی و انتقال بخش باارزشِ دانش هندسه، تغییراتی ایجاد گردد. پیشنهاد آن‌ها این بود که یک درس جدید با نام *هندسهٔ ملموس* در دورهٔ ابتدایی تدریس شود. چنین درسی می‌توانست «دانش‌آموزان را با حقایق هندسهٔ مسطحه و فضایی و همچنین با مفاهیمی که برای استدلال مجرد در هندسه لازم است، آشنا سازد» (ص، ۱۰۶). در واقع، تصور گروه کنفرانس ریاضی از هندسهٔ دبیرستان بر این اساس شکل می‌گرفت که دانش‌آموزان در دورهٔ

ابتدایی حقایق پایه را در درس هندسهٔ ملموس فراگرفته‌اند. بر اساس این تصور، برای دبیرستان «هندسه‌ای اثباتی در نظر گرفتند که سازوکار منطق رسمی را به بهترین شکل و در کل برنامهٔ درسی، نمایان سازد» (ص ۱۱۵). در سال‌های قبل از این گزارش، هندسهٔ مدرسه به یک‌سری روابط منطقی بین حقایقی در مورد صفحه و فضا تبدیل شده بود و اینکه اشیاء هندسی چگونه به‌وجود آمده‌اند و درستی خواص آن‌ها چگونه اثبات می‌شوند، اهمیت چندانی نداشت. اصلاحاتی که توسط کمیتهٔ ده‌نفره پیشنهاد شد، همان دیدگاه قبلی را با شدت بیشتری تأیید کرد. از این رو، «هنر اثبات» به اصلی‌ترین موضوع مورد مطالعه در درس هندسه تبدیل شد. این‌گونه پذیرفته شد که راه اکتساب هنر اثبات، انجام اثبات است. در واقع، درگیر شدن واقعی با حقایق هندسی، به بهانهٔ به دست آوردن این هنر انجام می‌شد. حقایق هندسی که قبلاً به‌عنوان تکیه‌گاهی برای توسعهٔ استدلال به کار رفته بودند، اکنون بدون هیچ کوششی در جهت انجام استدلال استنتاجی و فقط به‌عنوان حقایقی درست، تدریس می‌شدند (ر.ک. هالستد، ۱۸۹۳). اما این تغییرات برای این بود که نشان دهند از این موضوع آگاه هستند که انجام استدلال منطقی با به خاطر سپردن یک استدلال منطقی تفاوت دارد ودانش‌آموزان باید اولی را یاد بگیرند.

بنابراین، در حالی که فراهم کردن فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان جهت انجام اثبات به بخشی از برنامهٔ درسی هندسه تبدیل شده بود، کمیتهٔ ده‌نفره آن را به بخشی مهم و مرکزی تبدیل کرد. انگیزهٔ متداول برای سوق دادن دانش‌آموزان به سمت اثبات کردن و همچنین نپذیرفتن «اثبات‌هایی که به‌طور رسمی کامل و دقیق نیستند» به دلیل اینکه آن‌ها باعث تلاشی در جهت آموزش نمی‌شوند (الیوت و همکاران، ۱۸۹۳/۱۹۶۹، ص ۲۵)، یک چالش جدی برای روش تدریس ایجاد کرد. چالش این بود که چگونه تضمین شود که درس هندسه در دبیرستان جایی خواهد بود که در آن برای دانش‌آموزان نه تنها فرصت اثبات فراهم می‌گردد، بلکه اثبات کردن از آن‌ها خواسته می‌شود.

دورهٔ تمرین: یادگیری انجام اثبات

توصیه‌های کمیتهٔ ده‌نفره، منجر به تغییرات مهمی در کتاب‌های درسی هندسه شد. تعداد موقعیت‌ها برای دانش‌آموزان جهت انجام اثبات در کتاب‌هایی که بعد از این توصیه‌ها چاپ شدند، در مقایسه با کتاب‌های دوران اصیل، بیشتر شد و ماهیت آن‌ها نیز تغییر کرد. از آن‌جا که به نظر می‌رسید بیشتر تغییرات مشاهده شده در موضوعات درسی، برای تقویت عملکرد دانش‌آموزان در اثبات آن «تمرین‌ها» بود، من این زمان را دورهٔ تمرین می‌نامم. در بخش‌های بعدی توضیح خواهم داد که چه تغییراتی و برای چه، در این دوره اتفاق افتاد.

تدریس دربارهٔ اثبات

اگر چه در دوره‌های پیشین نیز تولید اثبات از دانش‌آموزان خواسته می‌شد، اما کتاب‌های درسی به تفصیل دربارهٔ ماهیت اثبات بحث نمی‌کردند. همچنین، با وجود اینکه در کتاب‌ها، راهکارها و روش‌های متنوعی برای اثبات حکم‌ها به کار می‌رفت، اما متداول نبود که این روش‌ها با جزئیات تشریح شوند. تغییر قابل توجهی که در دورهٔ تمرین رخ داد شرح و بیان این نکته بود که منظور از یک اثبات چیست و چگونه باید باشد. کتاب‌ها شروع به تدریس روش‌ها و راهکارهایی کردند که در انجام اثبات لازم می‌شد.

از توصیف اثبات تا قالب اثبات دوستونی

کتاب‌های دورهٔ اصیل، تلاش می‌کردند که با آوردن اثبات برای قضیه‌های مطرح شده در درس، بیان کنند که منظورشان از اثبات چیست. پس از انتشار گزارش کمیتهٔ ده‌نفره، توصیف‌ها و تعریف‌های صریح‌تری از اثبات در کتاب‌ها ظاهر شد. برای مثال، ووستر بمن[۴۴] و دیوید اوگن اسمیت[۴۵]، شروع به تألیف یک‌سری کتاب تحت عنوان «هندسهٔ مسطحهٔ جدید» کردند. آن‌ها یک بخش به‌نام «حکم‌های مقدماتی» ایجاد کردند که «به تازه‌کارها ماهیت اثبات هندسی را نشان دهند و به‌وسیلهٔ مراحلی ساده، آن‌ها را به تحسین منطق هندسه، رهنمون سازند» (بمن و اسمیت، ۱۸۹۹، ص ۱۳). همچنین علاوه بر ارائه کردن اثبات بعضی از حکم‌ها به‌عنوان نمونه و مدل، بمن و اسمیت، یک بخش را تحت عنوان «ماهیت یک اثبات منطقی» در کتاب ایجاد کردند که در آن‌جا به‌طور دقیق توصیف می‌کردند که یک اثبات چگونه باید باشد:

> هر گزاره‌ای در اثبات باید بر مبنای یک اصل، تعریف و یا حکمی باشد که قبلاً اثبات شده باشد به‌طوری که هر وقت لازم شد دانش‌آموز بتواند اثبات آن را ارائه کند... . درستی هیچ گزاره‌ای فقط به این دلیل که از روی شکل معلوم است، پذیرفته نیست ... . گزاره‌هایی که برای اثبات یک نتیجه ارائه می‌شوند، خلاصه و موجز باشند. اگر اثبات روی تخته سیاه نوشته می‌شود، مراحل شماره‌گذاری شوند تا هم کلاس و هم معلم بتوانند به سادگی ارجاع

بدهنـد. میزان این ارجاعات بعد از هر مرحله را معلم باید به‌طور شفاهی یا مکتوب به دانش‌آموزان اعلام کند (بمن و اسمیت، ۱۸۹۹، ص ۲۰-۱۹).

بمـن و اسـمیت ابزارهایی کاغذی ارائـه کردند که شـناخته شده بودند و قبلاً توسـط معلم‌ها برای بررسی جنبه‌هـای رسـمی کارهـای دانش‌آمـوزان اسـتفاده می‌شـدند. اما باعث شـدند که قیدها و شـرایط موجود تصریح و روشـن شـوند و دانش‌آموزان این گونه توجیه شـوند که آنچـه در کارهـای آن‌ها مهم اسـت، ترتیب منطقی گزاره‌هاسـت.

تغییـر قابـل توجه بعـدی دربارهٔ تصریح و روشـن کردن اثبات، در ویرایش دوم کتاب درسـی هندسهٔ آرتور شولتز[۴۶] و فرانک سون‌اوک[۴۷]، بنیان گذاشته شد (۱۹۱۳). شیبلی (۱۹۳۲) اظهار می‌دارد که این دو نویسنده اولین کسانی بودند که اثبات را به‌صورت دو ستون از گزاره‌ها و دلایل‌شان نوشتند که با یک خط عمودی از یکدیگر جدا شـده بودند (شکل ۱ را ببینید). شـیبلی (۱۹۳۲) اضافه می‌کند:

به نظر می‌رسـد که چنین آرایشـی [در دو ستون]، جهـت تأکید بیشـتر بر لزوم ارائهٔ دلیل بـرای هر گزاره باشـد و همچنین هنگامی که معلم آن اثبات نوشته شده را تصحیـح می‌کند، باعث صرفه‌جویی در وقت می‌شـود. (ص ۱۴۵)

پس از اینکه قالب اثبات دوسـتونی بـرای اولین بار استفاده شـد، شـولتز و سـون‌اوک آن‌را چنین توصیف کردند:

هر اثباتی شـامل تعدادی گزاره است که هر کدام با یک دلیلِ روشـن، حمایت می‌شود. تنها دلایل قابل قبول که می‌توان ارائه کرد عبارت اسـت از: حکمی که درستی آن قبلاً اثبات شده است؛ یک اصل، یک تعریف و یا یکی از فرض‌هایی که در مسـئله آورده شـده است. (شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳، ص ۱۹)

میـزان گسـترش اسـتفاده از ایـن قالـب اثبات و همچنین مدتی کـه این قالب به‌عنوان نمـادی از اثبات در ریاضی مدرسـه دوام آورد، بسیار چشمگیر است. نظم و ترتیبـی که ظاهر ایـن قالب بر اجـزای مختلف اثبات تحمیل می‌کرد، یکی دیگر از اقداماتی بود که باعث رایج شدن یک قاعده و نظام برای تولید و کنترل اثبات توسط دانش‌آموزان می‌شـد. همچنین این قالـب، آن‌چه را که در عملکرد دانش‌آموزان مهم به نظر می‌رسـید، با وضوح بیشـتری و با ارائهٔ تصویری از یـک اثبات کامل، نمایش می‌داد.

نوشته‌ها و مقالات آموزشی آن زمان، در مورد اثبات، بیشـتر به رسمی یا غیررسمی بودن آن توجه می‌کردند- که اولی به اثباتی اشاره داشت که هرکدام از گزاره‌هایش بـا یک دلیل روشـن، همراه باشـد. در راسـتای اهداف کمیتهٔ ده‌نفره، یادگیری نحوهٔ نوشـتن اثبات‌های رسمی اهمیـت یافته بود، گرچه بعضی از حکم‌های کتاب به‌طور «غیررسـمی» اثبات شـده بودند. ایـن حقیقت که قالب اثبات دوسـتونی به روشـنی بر جنبه‌های رسـمی اثبات تأکید می‌کرد و به این باور که اثبات باید شامل مراحلی از گزاره‌ها به همراه دلایل‌شان باشد، جامهٔ عمل می‌پوشاند، باعـث مهم و مفید شـدنش در آن زمـان گردید. پس از توصیف چگونگی تغییر جنبه‌های دیگر درس هندسه، به این موضوع باز خواهم گشت.

تدریس روش‌ها و راهبردهایی برای اثبات حکم‌ها

کمیتهٔ ده‌نفره توصیه کـرده بود که روش‌هایی برای کشـف اثبات‌ها، به دانش‌آموزان تدریس شود. کتاب‌های درسـی محبوبی نظیر ونت‌ورث و ولـز، طبق این توصیه بازنگری شدند (ولز، ۱۹۰۸؛ ونت‌ورث، ۱۸۹۹). ونت‌ورث (۱۸۹۹)، بخشـی را تحـت عنـوان «روش‌هـای اثبـات قضیه‌هـا» به انتهای فصل اول و قبـل از تمرین‌ها اضافه کـرد کـه در آن روش‌های تحلیلـی، ترکیبـی[۴۸] و غیر مستقیم را عرضه کرده بود.

بعضـی از کتاب‌های جدید که در آن زمان منتشـر شدند، شامل نکات آشـکارتری در مورد روش‌های اثبات بودند. برای مثال، شولتز و سون‌اوک (۱۹۰۱)، در ویرایش اول کتاب‌شان قصد داشـتند که «دانش‌آموزان را به‌طور نظام‌منـدی[۴۹] با کارهای اصیل هندسـی، آشـنا کنند». بنابرایـن، آن‌ها ارائهٔ قضیه‌ها را بـا آوردن «تبصره‌هایی» دربـارهٔ رهیافت‌هایـی کـه در اثبات آن قضیه‌هـا به کار می‌رونـد، تکمیل کردنـد. از این رو، پـس از اثبات تمام حالات توازی، بیان کردند:

برای نشـان دادن توازی خطوط، می‌توان اثبات کرد: (الـف) دو زاویهٔ متبـادل داخلی برابرنـد، (ب) دو زاویهٔ متقابل داخلـی و خارجی برابرند، یا (ج) دو زاویهٔ متقابل داخلی مکمل هستند (ص، ۲۰).

تمرین‌ها معمولاً کنار قضیه‌هایی چیده می‌شدند که با همان رهیافت‌ها اثبات می‌شـدند. ماهیت این تمرین‌ها و ارتباط‌شان با قضیه‌های درسی، شایستهٔ شرح و تفصیل بیشتری است.

اطمینان یافتن از انجام اثبات توسط دانش‌آموزان: از کارهای اصیل تا تمرین‌ها

دستورالعمل‌های دقیق‌تری دربارهٔ چگونگی سازماندهی درس هندسه در سندی که توسط کمیته‌ای جدید منتشر شد، فراهم گردید (نایتینگل و همکاران، ۱۸۹۹). این کمیتهٔ جدید گزارشی را نیز منتشر کرد که توسط گروهی از متخصصان ریاضی به سرپرستی ژاکوب و. ا. یانگ[۵۰]، استاد آموزش ریاضی از دانشگاه شیکاگو، تهیه شده بود. هم‌چنین، این گروه شامل هفت استاد ریاضی و دو مدیر مدرسه بود (یانگ و همکاران، ۱۸۹۹). آن‌ها پیشنهاد کردند که درس هندسه باید از دو جزءِ مختلف، یعنی حکم‌های بنیادین و تمرین‌ها تشکیل شود. حکم‌های بنیادین باید «حداقلِ قضیه‌هایی باشد که تمام دانش‌آموزان باید بدانند» (ص۱۴۲)- در واقع باید بتوان با این قضیه‌ها کل مباحث درس را ارائه کرد. اما علاوه بر آن، اثبات آن قضیه‌ها باید نمونه‌هایی باشند که منظور ما از اثبات را برسانند و خود آن قضیه‌ها باید اطلاعاتی باشند که دانش‌آموزان از آن‌ها هنگام اثبات «تمرین‌ها» استفاده کنند. کمیتهٔ ۱۸۹۹، تأکید داشت که مطالعهٔ ریاضی، وقتی ارزشمند است که دانش‌آموزان در آن فکر و تولید داشته باشند؛ «فقط اثبات‌ها را یاد نگیرند، بلکه اثبات کردن باید وظیفهٔ آن‌ها باشد» (یانگ و همکاران، ۱۸۹۹، ص ۱۳۶).

همان‌طور که در بخش ۴ معلوم شد، دادن فرصت به دانش‌آموزان برای تولید اثبات، امر جدیدی نبود. در حالی‌که تصور می‌شد تغییر نام از «اصیل» به «تمرین» فقط به دلیل معروف شدن اصطلاحات مربوط به موضوع پرورش ذهن باشد، اما فقط یک تغییر نام ساده نبود. در واقع تعداد «کارهای اصیل» بسیار کم بود و حکم‌های بسیار مشکلی بودند، در صورتی‌که «تمرین‌هایی» که دانش‌آموزان باید برای آن‌ها اثبات تولید می‌کردند، «زیاد، ساده و درجه‌بندی شده بودند» (یانگ و همکاران، ۱۸۹۹، ص ۱۳۶) و اثبات آن‌ها بر مبنای حکم‌های بنیادین بود (همان، ص۱۴۲).

در مقایسه با دورهٔ کارهای اصیل، در این دوره به دانش‌آموزان نه تنها فرصت تولید اثبات می‌دادند، بلکه آن‌ها «واقعاً اثبات را به وسیلهٔ اثبات کردن یاد می‌گرفتند» (یانگ، ۱۹۰۶، ص ۲۵۹). از همین رو، شولتز (۱۹۱۲، ص ۹۸) متذکر شد که فقط اختصاص دادنِ زمانی برای انجام کارهای اصیل، با انجام دادن آن‌ها «طبق اصول کامل پداگوژیکی»، یکسان نبودند؛ و یانگ (۱۹۰۶، ص ۲۶۰) اظهار داشت که از دانش‌آموزان «واقعا انتظار می‌رفت که در کشف اثبات‌ها موفق باشند». بنابراین، دادن فرصتِ انجام اثبات به دانش‌آموزان، تنها مرحلهٔ اول بود – باید آن فرصت واقعا استفاده، و اثبات انجام می‌شد تا هدف این درس، که همانا کسب کردن هنر اثبات بود، برآورده می‌شد.

معلمان باید گام‌های فعالانه‌ای را بردارند تا مطمئن شوند که هدف درس برآورده شده است. چنین بحثی در آن زمان بسیار معمول بود و مشخص می‌کرد که آموزشگران دربارهٔ دانش‌آموزان به‌عنوان یادگیرنده، چه فکری می‌کردند. نظرِ د.ای.اسمیت (۱۹۱۱، ص ۷۰) این بود که دادن فرصت برای اثبات ممکن است کافی نباشد چراکه با وجود تنوعِ زیاد دانش‌آموزان در کلاس درس هندسه، این انتظار را از دانش‌آموزان که به «ترتیب منطقی حکم‌های اثبات شده» علاقه‌مند شوند دور از واقعیت جلوه می‌دهد. اما در حالی‌که «انجام اثبات‌های جدید» توسط تمام دانش‌آموزان منطقی به نظر نمی‌رسید، اثبات حکم‌هایی که قبلاً برایشان اثبات شده بودند، امری بود که تمام دانش‌آموزان باید قادر به انجام آن می‌بودند (همان، ص ۱۶۰). اطمینان از اینکه تمام دانش‌آموزان اثبات انجام دهند، یکی از وظایفی بود که بر عهدهٔ حرفهٔ معلمی قرار داشت.

نویسندگان کتاب‌های راهنمای معلمان- نظیر شولتز، د.ای.اسمیت و یانگ- پیشنهادهایی در این خصوص ارائه دادند که چه کارهایی می‌توان در جهت موفقیت دانش‌آموزان در اثبات انجام داد. یانگ (۱۹۰۶، ص ۲۵۹) توصیه کرد که «محتوا باید به طرز شایسته‌ای ساده‌سازی و به‌صورت تکه‌های کوچکی برای دانش‌آموزان تقسیم شود». بعدها نیز کمیته‌ای پانزده‌نفره که روی برنامهٔ درسی و سرفصل‌های هندسه کار می‌کرد، توصیه‌هایی داشت مبنی بر اینکه تمرین‌ها ساده‌تر و ملموس‌تر باشند و همچنین کاربردی از قضیه‌های مطرح شده در کتاب باشند (اسلات[۵۱] و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۹۳). برای اینکه دانش‌آموزان معمولی کلاس «در اثبات کارهای اصیل، دلسرد و سردرگم نشوند، تمرین‌ها باید به ترتیب سختی و با شیبی ملایم و منطقی چیده شوند» (اسلات و همکاران،۱۹۱۲، ص ۹۵).

هنوز، تاحدی، هدف از ارائهٔ این تمرین‌ها، «فراهم کردن فرصتی برای تفکر بود»، اما هدف دیگر «تمرین و تکرار دستورالعمل‌هایی بود که مفهوم آن‌ها را قبلاً درک کرده بودند». در واقع دانش‌آموزان باید «کارهای جلسهٔ قبل را کامل می‌کردند، نه اینکه برای جلسهٔ بعد آماده شوند» (اسلات و همکاران، ص۱۳۲). بنابراین، تمرین‌هایی که پس از چند قضیه مطرح می‌گشت، به

نوعی کاربردی از آن قضیه‌ها محسوب می‌شدند. اسمیت (۱۹۱۱) اظهـار کرده بود که این تمرین‌های سـاده‌تر و اغلب «یک مرحله‌ای»، می‌توانند «تولید علاقه و کششی بکنند که از انجام یک کار مسـتقل، یا احساس موفقیت و غلبـه کردن و یـا میل به انجام کارهای اصیل، ناشـی می‌شود».

بنابرایـن، ایـن «تمرین‌هـا» از یـک جهت شـبیه «کارهای اصیل» هسـتند، چراکه نیاز است دانش‌آموزان از مهارت‌های استدلالی خود استفاده کرده و تولید اثبات کنند. به هر حال، آن‌ها تفاوت‌هایی نیز داشتند. تمرین‌ها دیگر فرصت‌هایی برای توسـعهٔ ایده‌های جدید وابسته به درس نبودند، بلکه بیشـتر برای تمرین چیزهایی بود که قبلاً یاد گرفته بودند. در نتیجه از یک سـو، متون اثبات دانش‌آموزی، در گذار از کارهای اصیل به تمرین‌ها، شامل یک پیوسـتگی در جنبه‌های رسـمیِ مورد تقاضا (تولید اثبات) می‌شـد. اما از سـوی دیگر شامل یک گسست در جنبه‌های بنیادی بود. در واقع، نقش اثبات از وسـیله‌ای برای یاد گرفتن چیزهای جدید به‌وسـیله‌ای برای تمرین چگونگی اسـتفاده از معلوماتِ قبلی، بـرای تولید اثبات، تبدیل شد.

ادامـهٔ این مقالـه (و منابع آن) را در شـماره ۱۲۰ بخوانید.

پی‌نوشت‌ها

* Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column
proof in the early twentieth century. Educational Studies in Mathematics, 49, 283–312.

** نویسـندهٔ مقاله (Patricio G. Herbst) از دانیل چازان (Daniel Chazan)، هومبرتـو آلاجیـا (Humberto Alagia) و دو بازنگر ناشناس به پاس توصیه‌های ارزشمندشان، قدردانی می‌کند.

*** ایده‌هـای اصلاحـات در ریاضی (به‌ویژه در هندسـه) در سـایر کشـورها نیز وجود داشـته اسـت (برای مثال ر.ک. به هاسـون(Howson) ۱۹۸۲، ص ۱۳۴-۱۳۶و ۱۵۵-۱۵۹؛ کیل‌پاتریـک (Kilpatrick)، ۱۹۹۲؛ پوانکاره (Poincare) ۱۸۹۹). در ایـن پژوهش خود را محدود به اسـتفاده از متونی کـرده‌ام که بـه وقایعی اشـاره دارند کـه به‌طور مسـتقیم بر کلاس‌های مدارس آمریکا تأثیر گذاشـته‌اند، اگرچه بسیاری از آن‌ها به واقع تأثیرات بین‌المللی داشته‌اند (برای نمونه ر.ک. به مور(Moor)، ۱۹۰۲؛ شـولتز (Schultze) ۱۹۱۲؛ اسلات و همکاران (Slaught et al) ۱۹۱۲).

1. Two-column Format
2. Rav
3. Notion
4. Doing proofs
5. Two-column proving custom
6. Kline
7. Intellectual
8. Nightingale
9. Scholarly Commentaries
10. Instructional Practices
11. Present Day Reform
12. Committee of Ten
13. Kliebard
14. Educational Leaders
15. National Educational Association
16. Krug
17. Sizer
18. George Stanic
19. Eileen Donoghue
20. Quast
21. Shibli
22. Baker
23. Harris
24. Simon Newcomb
25. Art of Demonstration(Proof)
26. Geometrical Demonstration
27. The Era of Text
28. John Playfair
29. John Farrar
30. Benjamin Greenleaf
31. Charles Davies
32. Untrained Intellect
33. William Chauvenet
34. William Byerly
35. George Wentworth
36. Hypothetical Constructions
37. Givens
38. Aids
39. Resulting
40.Eugene Richards
41. Halsted
42. George Shutts
43. Wells
44. Wooster Beman
45. David Eugene Smith
46. Arthur Schultze
47. Frank Sevenoak
48. Synthetic
49. Systematically
50. Jacob W. A. Young
51. Slaught